Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Michele Serra, Sarah Tanja Hess

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2021

Übungen zur Vorlesung Algebra II
Blatt 6 - Musterlösung

Abgabe von: Mein Name
Tutor: Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung sind alle Resultate des Skriptes der Algebra II zulässig. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Notation
Sei ∞ ein gegenüber $\mathbb{Z}$ neues Element mit $n + \infty := \infty =: \infty + n$ für alle $n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Definition
Sei K ein Körper.

(1) Eine surjektive Abbildung $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ist eine *diskrete Bewertung*, falls für alle $a, b \in K$

  (i) $v(ab) = v(a) + v(b)$,
  (ii) $v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$ und
  (iii) $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$

  erfüllt ist.

(2) Für eine diskrete Bewertung v ist der Unterring $R_v := \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$ von K der zugehörige *diskrete Bewertungsring*.

Aufgabe 6.1 **[1+1+1+1 Punkte]**

Sei K ein Körper, $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ eine diskrete Bewertung, R_v der zugehörige Bewertungsring, $r \in R_v \setminus \{0\}$ und $t \in R_v$ erfülle $v(t) = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass r genau dann eine Einheit in R_v ist, wenn $v(r) = 0$ gilt.

(b) Beweisen Sie die Existenz eines geeigneten $n \in \mathbb{N}_0$ und $u \in R_v^\times$ mit $r = ut^n$.

(c) Zeigen Sie, dass R_v ein ganz abgeschlossener Hauptidealbereich ist.

(d) Beweisen Sie die Existenz eines eindeutigen nicht-trivialen Primideals von R_v.

Lösung:

(a) Man bemerke zunächst allgemein, dass aus $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$ über $\mathbb{Z}$ unmittelbar $v(1) = 0$ für sämtliche diskrete Bewertungen folgt.

($\Rightarrow$) Sei $r \in R_v^\times$ gegeben, dann liegt somit $r^{-1} \in K$ ebenfalls in R_v, d.h. $v(r^{-1}) \geq 0$ ist erfüllt. Ferner gilt $0 = v(1) = v(rr^{-1}) = \underbrace{v(r)}_{\geq 0} + \underbrace{v(r^{-1})}_{\geq 0}$ und damit insbesondere $v(r) = 0$.

($\Leftarrow$) Sei $r \in R_v$ mit $v(r) = 0$ gegeben, dann impliziert dies zum einen $r \neq 0$ und zum anderen auch $0 = v(1) = v(rr^{-1}) = \underbrace{v(r)}_{=0} + v(r^{-1}) = v(r^{-1})$, wobei $r^{-1} \in K$ stets existiert.

Per Definition eines diskreten Bewertungsringes liegt r^{-1} somit insbesondere in R_v und es folgt $r \in R_v^\times$. ■

(b) Nach Voraussetzung gilt $r \in R_v \backslash \{0\}$ und per Definition eines diskreten Bewertungsrings folgt somit $v(r) =: n \in \mathbb{N}_0$. Darüber hinaus gilt $v(r) = n = n \cdot 1 = nv(t) = v(t^n)$. Betrachte nun $u := t^{-n} r \in K$ und bemerke, dass dann bereits $r = ut^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist. Ferner folgt aus der eben getätigten Berechnung $v(u) = v(t^{-n}r) = -nv(t) + v(r) = 0$. Somit ist $u \in R_v^\times$ nach Aufgabenteil (a) erfüllt. ■

(c) Behauptung. R_v ist ein Hauptidealbereich.
Beweis der Behauptung. Sei I ein beliebig aber festes nicht-triviales echtes Ideal von R_v sowie $i \in I \backslash \{0\}$ beliebig aber fest, dann existiert nach Aufgabenteil (b) ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ ($n \neq 0$, da i keine Einheit nach Wahl von I (echt) sein kann) und $u \in R_v^\times$ mit $i = ut^n$. Somit liegt ut^n in dem Ideal I und unter Ausnutzung der Idealeigenschaft von I und $u \in R_v^\times$ folgt ferner $t^n = (\underbrace{u^{-1}u}_{=1})t^n = \underbrace{u^{-1}}_{\in R_v}\underbrace{(ut^n)}_{\in I} \in I$.

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ minimal gewählt sodass $t^m \in I$ erfüllt ist, dann impliziert dies unmittelbar $\langle t^m \rangle \subseteq I$. Sei ferner $j \in I \backslash \{0\}$ beliebig aber fest, dann ist j keine Einheit von R_v, da I ein echtes Ideal ist, und folglich existiert nach Aufgabenteil (b) ein $s \in \mathbb{N}$ und $v \in R_v^\times$ mit $j = vt^s$. Folgt man obiger Argumentation, so ergibt sich hieraus wiederum $t^s \in I$ und, da $m \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft $t^m \in I$ gewählt war, impliziert dies $m \leq s$. Somit teilt t^m bereits $vt^s = j$, sodass $j \in \langle t^m \rangle$ gefolgert werden kann. Da $j \in I \backslash \{0\}$ beliebig gewählt war, impliziert dies nun $I \subseteq \langle t^m \rangle$.

Insgesamt ist $I = \langle t^m \rangle$ somit ein Hauptideal und da I beliebig gewählt war, ist R_v folglich ein Hauptidealbereich. ■

Gemäß Beispiel 10.2 (i) ist jeder Hauptidealbereich ein Dedekindring und nach Satz 13.1 somit auch ganz abgeschlossen. Dies gilt insbesondere für den Hauptidealbereich R_v. ■

(d) Für den Beweis der Existenz eines nicht-trivialen Primideals von R_v bemerke zunächst, dass $t \in R_v$ nach Voraussetzung gilt. Ferner gilt gemäß der Definition einer diskreten Bewertung und Aufgabenteil (a) insbesondere $0 \neq t \in R_v \backslash R_v^\times$. Somit ist $\langle t \rangle$ ein nicht-triviales echtes Ideal von R_v. Nun existiert nach der B3 jedoch bereits ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von R_v mit $\langle r \rangle \subseteq \mathfrak{m}$, d.h. $\mathfrak{m}$ ist insbesondere nicht-trivial. Darüber hinaus sind maximale Ideale ebenfalls nach der B3 Primideale. Insgesamt existiert somit mindestens ein nicht-triviales Primideal von R_v, nämlich $\mathfrak{m}$.

Sei nun noch für den Eindeutigkeitsbeweis $\mathfrak{p}$ ein beliebig aber festes nicht-triviales Primideal von R_v, dann wurde im Beweis des Aufgabenteils (c) bereits gezeigt, dass $\mathfrak{p}$ von der Form $\langle t^m \rangle$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ ist. Damit liegt insbesondere $t^m \in \langle t^m \rangle = \mathfrak{p}$ und aufgrund der Primeigenschaft von $\mathfrak{p}$ somit auch $t \in \mathfrak{p}$. Es folgt $\langle t \rangle \subseteq \mathfrak{p}$. Offensichtlich gilt jedoch auch

$\mathfrak{p} = \langle t^m \rangle \subseteq \langle t \rangle$ und damit insgesamt $\langle t \rangle = \mathfrak{p}$. Das eindeutige nicht-triviale Primideal von R_v ist somit $\langle t \rangle$. ■

Aufgabe 6.2 **[1+1+1+1 Punkte]**

Sei R ein noetherscher lokaler Integritätsbereich mit einem eindeutigen maximalen Ideal $\mathfrak{m} = \langle t \rangle$ für ein geeignetes $t \in R$.

(a) Zeigen Sie, dass R ein Hauptidealbereich ist.

(b) Beweisen Sie die Existenze eines eindeutigen nicht-trivialen Primideals von R.

Sei nun ferner $K := \mathrm{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von R und $k \in K^\times$.

(c) Beweisen Sie die Existenz eines eindeutigen $n \in \mathbb{Z}$ und eines eindeutigen $u \in R^\times$ mit $k = ut^n$.

(d) Zeigen Sie, dass R ein diskreter Bewertungsring ist.

Lösung:

(a) Bemerke zunächst $\langle t \rangle = \mathfrak{m} = R \backslash R^\times$ gemäß Aufgabe 6.4* (a), da R nach Voraussetzung lokal ist.

Sei nun I ein beliebig aber festes nicht-triviales echtes Ideal von R und $i \in I \backslash \{0\}$ beliebig aber fest, dann existiert ein geeignetes $u \in R^\times$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $i = ut^n$ aufgrund von $I \subseteq \mathfrak{m} = \langle t \rangle = R \backslash R^\times$ ($\mathfrak{m}$ ist das eindeutige maximale Ideal von R). Verwendet man nun noch die Idealeigenschaft von I so folgt $t^n = (\underbrace{u^{-1}u}_{=1})t^n = \underbrace{u^{-1}}_{\in R}\underbrace{(ut^n)}_{\in I} \in I$.

Sei von nun an $m \in \mathbb{N}$ minimal bezüglich der Eigenschaft $t^m \in I$ gewählt und betrachte ein beliebig aber festes $j = vt^s \in I \backslash \{0\}$ mit geeignetem $s \in \mathbb{N}$ und $v \in R^\times$ (analog zur obiger Argumentation). Hieraus folgt erneut $t^s \in I$ (ebenfalls analog zur obiger Argumentation) und da m minimal mit $t^m \in I$ gewählt ist auch $m \leq s$. Dies impliziert wiederum $j = vt^s \in \langle t^m \rangle$ und somit gilt insgesamt $I \subseteq \langle t^m \rangle$, da $j \in I \backslash \{0\}$ beliebig gewählt war. Offensichtlich gilt jedoch auch $\langle t^m \rangle \subseteq I$. Insgesamt ist I daher ein durch t^m erzeugtes Hauptideal und da I beliebig gewählt war, somit R ein Hauptidealbereich. ■

(b) Die Existenz eines nicht-trivialen Primideals ist klar.

Sei für den Beweis der Eindeutigkeit daher $\mathfrak{p}$ ein beliebig aber festes nicht-triviales Primideal von R. Da R nach Aufgabenteil (a) ein Hauptidealbereich ist, existiert folglich ein irreduzibles $p \in R$ mit $\langle p \rangle = \mathfrak{p}$. Ferner gilt auch $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$, sodass insgesamt $\langle p \rangle = \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m} = \langle t \rangle$ geschlussfolgert werden kann. Somit existiert ein geeignetes $u \in R$ mit $p = ut$. Da p jedoch irreduzibel ist, folgt hieraus $u \in R^\times$ oder $t \in R^\times$. Da t jedoch das maximales Ideal $\mathfrak{m} = R \backslash R^\times$ (vgl. Aufgabe 6.4* (a)) erzeugt, gilt somit unweigerlich $t \notin R^\times$ und damit wiederum $u \in R^\times$. Folglich sind p und t assoziiert und es folgt $\mathfrak{p} = \langle p \rangle = \langle t \rangle = \mathfrak{m}$.

Das eindeutige nicht-triviale Primideal von R entspricht somit dem eindeutigen maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von R. ■

(c) Es wird zunächst die Existenzaussage bewiesen. Betrachte hierfür in einem ersten Schritt den Fall $k \in R \backslash \{0\}$. Falls k darüber hinaus in $R^\times$ liegt, dann gilt offensichtlich $k = t^0 k$. Falls k hingegen in $\mathfrak{m} = R \backslash R^\times$ liegt, dann gilt bereits $k = ut^n$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ und $u \in R^\times$ (vgl. Beweis des Aufgabenteils (a)). Damit wurde die Situation für ein $k \in R \backslash \{0\}$ bereits vollständig geklärt.

Betrachte daher nun den allgemeinen Fall, dass k von der Gestalt $k = \frac{x}{y}$ mit geeigneten $x, y \in R\backslash\{0\}$ ist. Dann existieren nach den eben getätigten Beobachtungen folglich geeignete $n, m \in \mathbb{N}_0$, $u, v \in R^\times$ mit $x = ut^n$ und $y = vt^m$. Dies impliziert wiederum $k = \frac{x}{y} = \frac{ut^n}{vt^m} = \frac{u}{v}t^{n-m}$. Somit ist k von der gewünschten Gestalt, da $n - m$ offensichtlich eine ganze Zahl ist und $\frac{u}{v} = uv^{-1}$ als Produkt zweier invertierbarer Elemente aus $R^\times$ ebenfalls in $R^\times$ liegt.

Für den Eindeutigkeitsbeweis seien nun noch $n, m \in \mathbb{Z}$ und $u, v \in R^\times$ der Art, dass $ut^n = vt^m$ gilt. O.B.d.A. sei $n \leq m$, dann impliziert $1 = \frac{ut^n}{vt^m} = \underbrace{\frac{u}{v}}_{\in R} \underbrace{t^{n-m}}_{\in R}$, dass der Erzeuger t des maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ eine Einheit in R ist oder aber $n - m = 0$ gilt. Da der erste Fall nicht zutrifft (denn $\mathfrak{m} = R\backslash R^\times$ nach Aufgabe 6.4* (a)), folgt hieraus $n - m = 0$ bzw. $n = m$ und damit auch $1 = \frac{u}{v}t^{n-m} = \frac{u}{v}t^0 = \frac{u}{v}$ bzw. $u = v$. ■

(d) Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} v\colon K &\to \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ k &\mapsto \begin{cases} n_k, & \text{falls } k \neq 0 \\ \infty, & \text{falls } k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

wobei für $0 \neq k$ mit n_k die (eindeutige) ganze Zahl bezeichnet wird für die $k = ut^{n_k}$ mit geeignetem $u \in R^\times$ gilt. Diese eindeutige Existenz dieser folgt aus Aufgabenteil (c) (Wohldefiniertheit).

(Surjektivität) Offensichtlich ist v surjektiv, denn für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt $v(t^n) = n$ und $v(0) = \infty$ per Definition.

(Eigenschaft (i)) Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ und $u, v \in R^\times$ beliebig aber fest, dann gilt

$$v((ut^n)(wt^m)) = v((uw)t^{n+m}) = n + m = v(ut^n) + v(wt^m).$$

(Eigenschaft (ii)) Ferner gilt für beliebig aber festes $a \in K$ genau dann $v(a) = 0$, wenn $a = 0$ erfüllt ist (per Definition von v).

(Eigenschaft (iii)) Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq m$ und $u, v \in R^\times$ beliebig aber fest, dann gilt

$$v(ut^n + wt^m) = v(ut^n(1 + u^{-1}wt^{m-n})) = v(ut^n) + v(\underbrace{1 + u^{-1}wt^{m-n}}_{=:k}) = n + v(k).$$

Falls $k = 0$ gilt, dann folgt hieraus unmittelbar

$$v(ut^n + wt^m) = n + v(k) = n + v(0) = n + \infty = \infty \geq \min\{v(ut^n), v(wt^m)\}.$$

Sei daher o.B.d.A. $k \in K^\times$, dann existiert nach Aufgabenteil (c) ein (eindeutiges) geeignetes $l \in \mathbb{Z}$ und ein (eindeutiges) geeignetes $x \in R^\times$ mit $1 + u^{-1}wt^{m-n} = k = xt^l$. Dies impliziert wiederum $1 = xt^l - u^{-1}wt^{m-n} \in R$. Setze $l_0 := \min\{l, m - n\}$, dann gilt somit ferner schon $1 = \underbrace{t^{l_0}}_{\in R}(\underbrace{xt^{l-l_0} - u^{-1}wt^{m-n-l_0}}_{\in R})$. Folglich ist t^{l_0}, und damit auch insbesondere t, eine Einheit in R oder $l_0 = 0$. Da der erste Fall aber nicht zutrifft ($\mathfrak{m} = \langle t \rangle$ ist ein echtes Ideal von R nach Voraussetzung), muss $0 = l_0 = \min\{l, m - n\} \leq l$ gelten. Hieraus ist ingesamt, wie gefordert,

$$v(ut^n + wt^m) = n + v(k) = n + v(xt^l) = n + \underbrace{l}_{\geq 0} \geq n \underset{n \leq m}{=} \min\{n, m\} = \min\{v(ut^n), v(wt^m)\}$$

ersichtlich.

Zusammenfassend definiert v folglich eine diskrete Bewertung über K.

Behauptung. $R_v = R$
Beweis der Behauptung. ($\subseteq$) Sei $a \in R_v$ beliebig aber fest, dann gilt gemäß der Definition des diskreten Bewertungsrings R_v und der Definition von v bereits $0 \leq v(a) = n_a$ bzw. $n_a \in \mathbb{N}_0$. Folglich existiert nach Aufgabenteil (c) ein $u \in R^\times$ mit $a = ut^{n_a}$. Da t nach Voraussetzung ein Element von R ist und $n_a \in \mathbb{N}_0$ gilt, ist a somit als Produkt zweier Elemente aus R, nämlich $u, t^{n_a} \in R$, selbst ein Element in R.
($\supset$) Sei $a \in R$ beliebig aber fest, dann existiert nach dem Beweis des Aufgabenteils (c) insbesondere ein eindeutiges $n_a \in \mathbb{N}_0$ und $u \in R^\times$ mit $a = ut^{n_a}$. Dies impliziert wiederum $v(a) = n_a \in \mathbb{N}_0$ bzw. $v(a) \geq 0$ gemäß der Definition von v. Per Definition eines diskreten Bewertungsrings liegt a somit in R_v. ■

Insgesamt kann R somit als der diskrete Bewertungsring der diskreten Abbildung v über K aufgefasst werden. ■

Aufgabe 6.3 **[4 Punkte]**

Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass R genau dann ein Dedekindring ist, wenn R noethersch ist und die Lokalisierung $R_\mathfrak{m}$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R als diskreter Bewertungsring aufgefasst werden kann.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von einem Integritätsbereich R die Lokalisierung $R_\mathfrak{m}$ ganz abgeschlossen ist, dann auch R ganz abgeschlossen ist.

Lösung: ($\Rightarrow$) Da R nach Annahme ein Dedekindring ist, ist R nach Satz 13.1 insbesondere noethersch. Es genügt nun also zu zeigen, dass für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R die Lokalisierung $R_\mathfrak{m}$ als diskreter Bewertungsring aufgefasst werden kann. Hierfür soll Aufgabe 6.2 ausgenutzt werden, weswegen zunächst bewiesen werden muss, dass sämtliche Voraussetzungen dieser Aufgabe erfüllt sind.

Sei also $\mathfrak{m}$ ein beliebig aber festes maximales Ideal von R das o.B.d.A. nicht-trivial ist, dann ist nach Aufgabe 6.4* (c) die Lokalisierung $R_\mathfrak{m}$ ebenfalls ein Dedekindring und nach Satz 13.1 somit insbesondere noethersch. Ferner ist $R_\mathfrak{m}$ lokal mit dem eindeutigen nicht-trivialen maximalen Ideal $\mathfrak{p} := \mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$ gemäß Proposition 10.6 (e). Es bleibt nun somit zu zeigen, dass $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal ist.

Bemerke hierfür zunächst, dass die Menge der Hauptideale von $R_\mathfrak{m}$ ein maximales Element besitzt, da $R_\mathfrak{m}$ noethersch ist. Sei ein solches durch $\langle t \rangle$ mit einem geeigneten $t \in R_\mathfrak{m}$ gegeben. Nun ist dieses Hauptideal ein endliches Produkt aus nicht-trivialen Primidealen von $R_\mathfrak{m}$, da $R_\mathfrak{m}$ ein Dedekindring ist. Da jedoch in einem Dedekindring nach Satz 13.1 alle Primideale schon maximale Ideale sind und letzteres hier eindeutig durch $\mathfrak{p}$ gegeben ist, folgt somit $\langle t \rangle = \mathfrak{p}^n$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$.

Es genügt nun $n = 1$ zu beweisen, denn dann erzeugt t bereits $\mathfrak{p}$. Nehme daher in einem Widerspruchsbeweis an, dass $n > 1$ gilt und ein $s \in \mathfrak{p} \backslash \mathfrak{p}^n$ existiert (denn sonst impliziert $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^n$ ebenfalls unmittelbar die Aussage). Fixiere ein solches $s \neq 0$ und erkenne, dass erneut nach obiger Argumentation auch $\langle s \rangle = \mathfrak{p}^m$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ gilt. Da s jedoch nicht in $\mathfrak{p}^n$ liegt, ergibt sich hieraus zwingend $m < n$ und folglich auch $\langle t \rangle = \mathfrak{p}^n \subseteq \mathfrak{p}^m = \langle s \rangle$. Da t nach Wahl jedoch ein maximales Element der Menge der Hauptideale von $R_\mathfrak{m}$ ist, folgt hieraus unmittelbar $\langle t \rangle = \langle s \rangle$. Damit ist s ein Element von $\langle t \rangle$ was unmittelbar im Widerspruch zu der Wahl von s als Element von $\mathfrak{p}\backslash\mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}\backslash\langle t\rangle$ steht. Die Annahme war falsch und es folgt insgesamt $\mathfrak{m}R_\mathfrak{m} = \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^n = \langle t\rangle$.

Es kann nun Aufgabe 6.2 angewendet werden, wonach Aufgabenteil (d) unmittelbar impliziert, dass $R_\mathfrak{m}$ als diskreter Bewertungsring aufgefasst werden kann.

($\Leftarrow$) Das Ziel ist es Satz 13.1 anzuwenden.

Zu (1.) Nach Annahme ist R noethersch.
Zu (2.) Sei $\mathfrak{p}$ ein beliebig aber festes Primideal von R und $\mathfrak{m}$ ein geeignetes maximales Ideal von R mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$, dann ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{m}$ ein Primideal in der Lokalisierung $R_\mathfrak{m}$ gemäß Proposition 10.6 (d). Allerdings ist $R_\mathfrak{m}$ nach Annahme ein diskreter Bewertungsring und besitzt nach Aufgabe 6.1 (d) somit ein eindeutiges Primideal, das nach Proposition 10.6 (e) durch $\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$ gegeben ist. Folglich gilt $\mathfrak{p}R_\mathfrak{m} = \mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$ und gemäß Proposition 10.6 (d) somit auch $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$. Jedes Primideal von R ist somit insbesondere maximal.
Zu (3.) Es genügt zu zeigen, dass für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R die Lokalisierung $R_\mathfrak{m}$ ganz abgeschlossen ist, denn dann ist R nach dem *Hinweis* bereits ganz abgeschlossen. Sei daher $\mathfrak{m}$ ein beliebiges aber festes maximales Ideal von R. Nun kann nach Annahme die Lokalisierung $R_\mathfrak{m}$ als ein diskreter Bewertungsring aufgefasst werden und durch Aufgabe 6.1 (c) folgt hieraus wiederum, dass $R_\mathfrak{m}$ wie gefordert ein ganz abgeschlossen ist.

Die Anwendung von Satz 13.1 liefert nun, dass R ein Dedekindring ist. ■

Aufgabe 6.4* **[1+1+1+1 Punkte]**

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und S eine multiplikative Teilmenge von R mit $0 \notin S$.

(a) Zeigen Sie, dass R genau dann lokal ist, wenn $R\backslash R^\times$ ein Ideal von R ist.

(b) Zeigen Sie, dass falls R ein noetherscher Integritätsbereich ist, dann auch $S^{-1}R$ noethersch ist.

(c) Zeigen Sie, dass falls R ein Dedekindring ist, dann auch $S^{-1}R$ ein Dedekindring ist.

(d) Erarbeiten Sie ein Beispiel für einen faktoriellen Ring der kein Dedekindring ist.

Lösung:

(a) ($\Rightarrow$) Sei $\mathfrak{m}$ das eindeutige maximale Ideal von R, dann genügt es $\mathfrak{m} = R\backslash R^\times$ zu beweisen.
($\subseteq$) Als maximales Ideal ist $\mathfrak{m}$ insbesondere echt und enthält folglich keine Einheiten, i.Z. $\mathfrak{m} \subseteq R\backslash R^\times$.
($\supseteq$) Sei $r \in R\backslash R^\times$ beliebig aber fest, dann ist $\langle r\rangle$ ein echtes Ideal von R und damit in einem maximalen Ideal von R enthalten. Da R jedoch nur ein eindeutiges maximales Ideal besitzt, nämlich $\mathfrak{m}$, folgt somit $\langle r\rangle \subseteq \mathfrak{m}$ und damit insbesondere auch $r \in \mathfrak{m}$. Da $r \in R\backslash R^\times$ beliebig gewählt war, liefert dies $R\backslash R^\times \subseteq \mathfrak{m}$.

($\Leftarrow$) In diesem Beweis wird zunächst ein konkretes maximales Ideal in R bestimmt und dann gezeigt, dass dieses bereits das eindeutige maximale Ideal von R ist (nämlich $R\backslash R^\times$). Betrachte also zunächst das Ideal $R\backslash R^\times$ von R und bemerke, dass dieses in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von R enthalten ist, i.Z. $R\backslash R^\times \subseteq \mathfrak{m}$. Da maximale Ideale aber stets echt sind und somit niemals Einheiten enthalten, folgt auch $\mathfrak{m} \subseteq R\backslash R^\times$. Insgesamt gilt also $R\backslash R^\times = \mathfrak{m}$ und folglich ist $R\backslash R^\times$ ein maximales Ideal von R.

Für den Eindeutigkeitsbeweis sei nun N ein beliebiges aber festes maximales Ideal von R, dann ist N insbesondere echt und somit gilt analog zur obigen Argumentation $N \subseteq R \backslash R^\times$. Da $R \backslash R^\times$ jedoch ein Ideal ist, das das maximale Ideal N enthält, folgt zwingend $N = R \backslash R^\times$. ■

(b) Gemäß Proposition 7.1 genügt es zu zeigen, dass jedes Ideal von $S^{-1}R$ endlich erzeugt ist. Sei daher I ein beliebig aber festes Ideal von $S^{-1}R$ und bemerke, dass $I^c := I \cap R$ nach Proposition 10.6 (b) sodann ein Ideal von R ist. Da R nach Annahme jedoch noethersch ist, ist das Ideal I^c bereits endlich erzeugt (vgl. Proposition 7.1), d.h. es existieren geeignete $i_1, \dots, i_n \in I^c$ ($n \in \mathbb{N}$) mit $I^c = \langle i_1, \dots, i_n \rangle$. Es genügt nun $I^{ce} \overset{!}{=} \langle \frac{i_1}{1}, \dots, \frac{i_n}{1} \rangle$ zu beweisen, denn nach Proposition 10.6 (b) (i) gilt $I^{ce} = I$ womit letzteres somit insbesondere auch endlich erzeugt ist.
($\subseteq$) Sei $j \in I^{ce} = S^{-1}RI^c$ beliebig aber fest, dann existieren per Definition geeignete $r \in R$, $s \in S$ und $i \in I^c$ mit $j = \frac{r}{s}i$. Da I^c in R darüber hinaus endlich erzeugt durch $\{i_1, \dots, i_n\}$ ist, existieren ferner geeignete $r_1, \dots, r_n \in R$ mit $i = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k i_k$. Es folgt

$$j = \frac{r}{s}i = \frac{r}{s}\sum_{k=1}^{n} r_k i_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{r}{s} r_k i_k = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{rr_k}{s}}_{\in S^{-1}R} \frac{i_k}{1} \in \left\langle \frac{i_1}{1}, \dots, \frac{i_n}{1} \right\rangle$$

in $S^{-1}R$.
($\supseteq$) Klar. ■

(c) Das Ziel ist es Satz 13.1 anzuwenden.

Zu (1.) Da R nach Annahme ein Dedekindring ist, ist R nach Satz 13.1 insbesondere noethersch. Nach Aufgabenteil (b) bzw. Proposition 10.7 (i) ist somit auch $S^{-1}R$ noethersch.
Zu (2.) Sei $\mathfrak{p}$ ein beliebig aber festes Primideal von $S^{-1}R$, dann ist nach Proposition 10.6 (b) und (c) $\mathfrak{p}^c := \mathfrak{p} \cap R$ ein Primideal von R. Da R nach Annahme ein Dedekindring ist, ist nach Satz 13.1 insbesondere jedes Primideal von R ein maximales Ideal. Folglich ist $\mathfrak{p}^c$ ein maximales Ideal von R. Sei nun I ein Ideal von $S^{-1}R$ mit $\mathfrak{p} \subseteq I$, dann gilt nach Proposition 10.6 (b) insbesondere die Idealinklusion $\mathfrak{p}^c \subseteq I^c$. Da $\mathfrak{p}^c$ jedoch ein maximales Ideal von R ist, folgt $\mathfrak{p}^c = I^c$ und somit auch $\mathfrak{p} = I$ gemäß Proposition 10.6 (c). Folglich ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von $S^{-1}R$.
Zu (3.) Da R nach Annahme ein Dedekindring ist, ist R nach Satz 13.1 insbesondere ganz abgeschlossen. Nach Aufgabe 5.2 (c) bzw. Proposition 10.7 (ii) ist somit auch $S^{-1}R$ ganz abgeschlossen.

Die Anwendung von Satz 13.1 liefert nun, dass $S^{-1}R$ ein Dedekindring ist. ■

(d) Betrachte den Polynomring $\mathbb{Q}[X, Y]$ aus Beispiel 13.1 (iii). Bekannterweise ist $\mathbb{Q}$ faktoriell und damit auch $\mathbb{Q}[X, Y]$ gemäß Korollar 8.2 aus der B3.

Es genügt nun zu zeigen, dass in $\mathbb{Q}[X, Y]$ ein Primideal existiert, das nicht echt ist. Die Aussage folgt sodann aus Satz 13.1. Betrachte daher das Ideal $\langle X \rangle$ von $\mathbb{Q}[X, Y]$. Dies ist offensichtlich ein Primideal von $\mathbb{Q}[X, Y]$. Ferner gilt $\mathbb{Q}[X, Y]/\langle X \rangle \simeq \mathbb{Q}[Y][X]/\langle X \rangle \simeq \mathbb{Q}[Y]$. Da $\mathbb{Q}[Y]$ jedoch kein Körper ist, ist somit $\langle X \rangle$ kein maximales Ideal von $\mathbb{Q}[X, Y]$ gemäß Proposition 3.1 aus der B3.

In dem faktoriellen Polynomring $\mathbb{Q}[X, Y]$ existiert folglich ein Primideal das nicht maximal ist, nämlich $\langle X \rangle$. Die Kontraposition von Satz 13.1 impliziert nun, dass $\mathbb{Q}[X, Y]$ kein Dedekindring ist. ■

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 10. Juni 2021, um 10:00 Uhr**, direkt an den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.